

# Aplicación de la sensibilidad a la síntesis óptima de mecanismos planos con restricciones cinemáticas

R. Sancibrián, F. Viadero, P. García y A. Fernández

*E.T.S.I. Industriales, Universidad de Cantabria, Avda. de los Castros s/n, Santander, 39005 Cantabria, Tel.:942201859, FAX: 942201873, e-mail:sancibrr@unican.es*

## Resumen

En este artículo se presenta un procedimiento de síntesis óptima de mecanismos basado en análisis de sensibilidad. Los coeficientes de sensibilidad obtenidos ofrecen una relación de primer orden entre los parámetros que definen la geometría del mecanismo y sus características cinemáticas. El procedimiento utiliza estos parámetros de sensibilidad para proporcionar la información necesaria de evolución desde el mecanismo inicial hasta la solución optimizada.

**Palabras Clave:** mecanismos, síntesis, sensibilidad, optimización.

## Abstract

This paper describes a procedure for the optimal synthesis of mechanisms based on sensitivity analysis. The sensitivity coefficients obtained give a first order relationship between geometrical parameters and kinematic characteristics of the mechanism. The procedure uses these sensitivity parameters in order to obtain the necessary information about the evolution of the mechanism from the initial configuration to the optimal solution.

**Keywords:** mechanisms, synthesis, sensitivity, optimization.

## 1. Introducción

En general los problemas de síntesis óptima de mecanismos se formulan como la minimización de una función objetivo denominada Función de Error Estructural (FEE). La FEE se define mediante una expresión matemática que mide de algún modo la diferencia entre la curva o trayectoria deseada y la curva o trayectoria generada por el mecanismo durante el proceso de optimización [1]. Ambas curvas, deseada y generada, pueden ser definidas bien de forma continua o a través de una serie de puntos discretos denominados puntos de precisión. En el segundo caso el número de puntos de precisión empleado en la definición de cada curva así como la separación entre ellos juegan un papel decisivo a la hora de establecer el método de optimización. En los métodos tradicionales, cuando el número de puntos de precisión es elevado, el tiempo computacional crece de forma prohibitiva, incluso con modernos ordenadores, no garantizando una solución óptima en todos los casos [3].

El trabajo aquí presentado trata de resolver problemas de síntesis óptima de mecanismos cuando la trayectoria deseada se define a través de un elevado número de puntos de precisión buscando una solución aproximada con un coste computacional bajo.

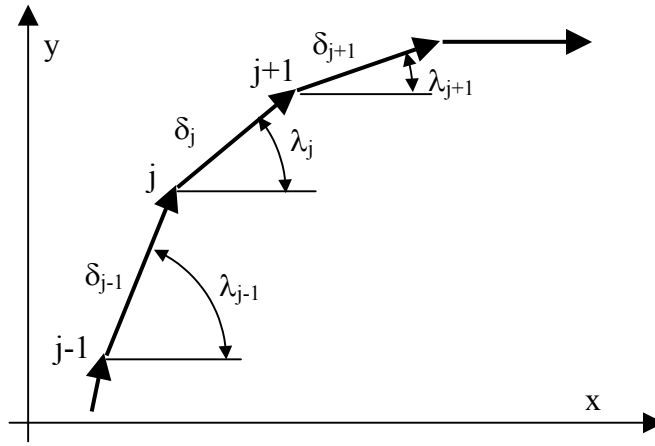
## 2. Definición de la FEE.

Uno de los primeros problemas que aparece a la hora de establecer un algoritmo para la resolución de problemas de síntesis óptima es la correcta formulación de la *FEE*. Los métodos tradicionales [1,3] establecen esta función como la diferencia entre la curva o trayectoria deseada y la curva o trayectoria generada por el mecanismo. Tradicionalmente esta diferencia se formula como la distancia media cuadrática entre las coordenadas de los puntos de precisión mediante la siguiente expresión:

$$FEE = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |V_j W_j|^2 \quad (1)$$

Donde  $V_j$  y  $W_j$  representan las coordenadas de los puntos de precisión definiendo la curva generada y la curva deseada respectivamente. Esta estimación del error estructural presenta varios problemas a la hora de conseguir una buena estimación en todas las situaciones [3], y por tanto, produciendo un mal rendimiento del método. Las desventajas de la Ecuación (1) pueden resumirse principalmente en las dos siguientes: a) tiene en consideración la distancia relativa entre las diferentes coordenadas de los puntos limitando la solución alcanzada por el proceso de optimización, y b) no tiene en consideración la orientación relativa entre ambas curvas pudiendo desechar soluciones válidas en el proceso de optimización.

Con el objeto de solventar estos problemas en este trabajo se han introducido nuevos parámetros. La Figura 1 muestra la definición de una curva (deseada o generada) a través de los puntos de precisión. Tal y como puede observarse la definición de la curva puede hacerse empleando vectores que definen la posición relativa de cada uno de los puntos y en consecuencia son necesarios dos parámetros por punto de precisión: ángulo de orientación  $\lambda$ , y distancia relativa  $\delta$ .



**Figura 1.** Parámetros que definen la trayectoria.

El problema de la orientación entre curvas puede eliminarse mediante la definición de un nuevo parámetro denotado como  $\eta$  y formulado como sigue,

$$\eta = \lambda_{j+1} - \lambda_j \quad (2)$$

de esta forma no es la orientación absoluta del vector lo que define la curva si no su orientación relativa con respecto a los otros vectores. La expresión matemática resultante de la FEE en este caso será la siguiente:

$$FEE = \tau_\delta (\delta_d - \delta_g)^T (\delta_d - \delta_g) + \tau_\eta (\eta_d - \eta_g)^T (\eta_d - \eta_g) \quad (3)$$

donde  $\tau_\delta$  y  $\tau_\eta$  son parámetros de ponderación y ofrecen una mayor influencia de la orientación o de la distancia relativa en función de su valor.

### 3. Coeficientes de sensibilidad.

Los coeficientes de sensibilidad presentados en este trabajo establecen la relación entre los parámetros que definen la trayectoria de un punto del elemento acoplador y las variables de diseño. Para cada una de las dimensiones  $z_k$  que define la longitud de las barras del mecanismo se plantean dos coeficientes de sensibilidad de la siguiente forma:

$$S_{\delta k} = \frac{\partial \delta}{\partial z_k}; \quad S_{\phi k} = \frac{\partial \lambda}{\partial z_k} \quad (4)$$

donde el subíndice k puede variar desde 1 hasta 6. Para calcular estos coeficientes se considera un mecanismo cuadrilátero articulado en dos posiciones cercanas a lo largo de

su recorrido. La modificación experimentada por los diferentes parámetros que definen el mecanismo pueden observarse en la Figura 2. La expresión matemática expresada en forma compleja que describe la relación entre las variables de diseño y los parámetros  $\lambda$  y  $\delta$  es la siguiente:

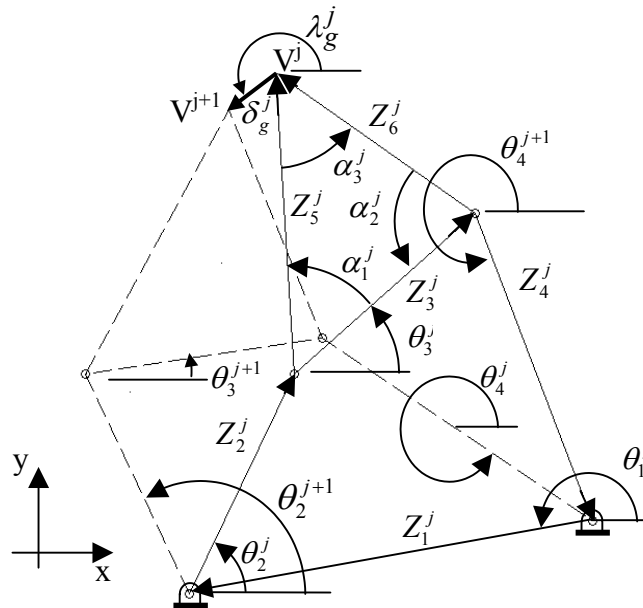
$$\delta e^{i\lambda} = z_2(e^{i\theta_{j+1}} - e^{i\theta_j}) + z_5(e^{i(\alpha+\theta_j)} - e^{i(\alpha+\theta_{j-1})}) \quad (5)$$

Derivando la Ecuación 5 se obtiene la siguiente expresión,

$$S_{\delta k}^j e^{i\lambda_g^j} + S_{\lambda k}^j i\delta_g^j e^{i\lambda_g^j} = \sum_m \left\{ D_{mk}^j \left[ e^{i\theta_m^{j+1}} - e^{i\theta_m^j} \right] + Z_m^j \left[ E_{mk}^{j+1} e^{i\theta_m^{j+1}} - E_{mk}^j e^{i\theta_m^j} \right] \right\}; \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad (6)$$

donde el subíndice m adopta dos valores: 2 y 5, y los parámetros  $D_{mk}^j$  representan la derivada de la dimensión de la barra m con respecto a la derivada de la dimensión de la barra k. El valor de este último parámetro puede ser determinado fácilmente como  $D_{mk} = \delta_{mk}$ , donde  $\delta_{mk}$  representa la delta de Kronecker. Los valores de los parámetros  $E_{mk}$  representan las derivadas de los ángulos respecto de la dimensión de las barras y pueden ser determinadas según el procedimiento presentado por Lee [3].

La Ecuación (6) puede ser resuelta algebraicamente como un sistema de dos ecuaciones donde las incógnitas son las sensibilidades de interés obteniendo la solución siguiente,



**Figura 2.** Desplazamiento del cuadrilátero articulado entre dos posiciones.

$$\begin{aligned}
S_{\delta k}^j &= H_k^j \cos \lambda_g^j + G_k^j \sin \lambda_g^j \\
S_{\lambda k}^j &= \frac{1}{\delta_g^j} (H_k^j \cos \lambda_g^j - G_k^j \sin \lambda_g^j)
\end{aligned} \tag{7}$$

donde  $H_k^j$  y  $G_k^j$  representan respectivamente la parte real e imaginaria del término izquierdo de la Ecuación (6).

#### 4. Proceso de optimización.

Las ecuaciones (7) ofrecen una información muy valiosa sobre la variación que se produce en el movimiento de un punto del acoplador cuando se produce una pequeña variación en las dimensiones una de las barras del mecanismo cuadrilátero articulado. Esta información puede ser empleada durante el proceso de optimización para establecer que elemento o elementos deben modificar su dimensión de forma que la función generada se aproxime al máximo a la función deseada con el mínimo cambio en la geometría del mecanismo. Para ello se puede emplear el desarrollo en serie de Taylor hasta el término que contiene la primera derivada. Esto es,

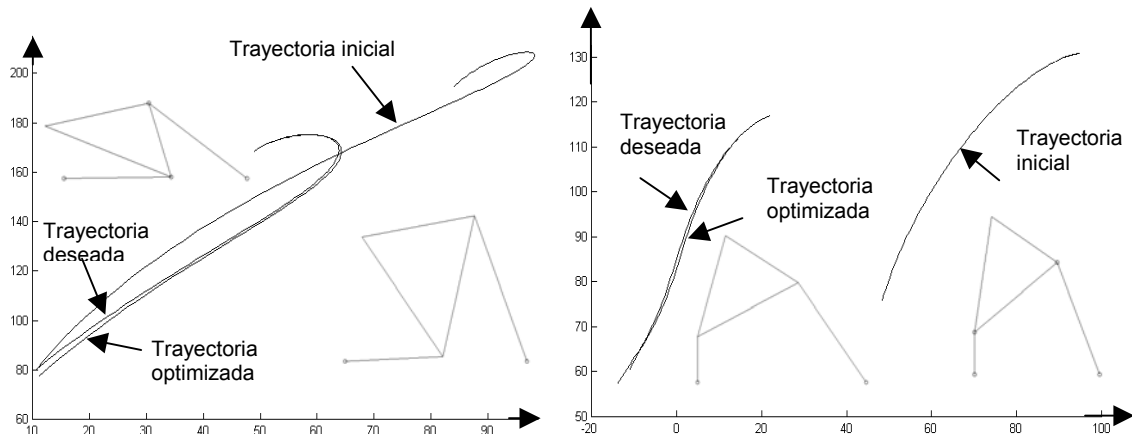
$$\delta_d^j \approx \delta_g^{j*} + \frac{\partial \delta_g^j}{\partial z_k^j} (z_k^j - z_k^{j*}) = \delta_g^{j*} + S_{\delta k}^j \Delta z_k^j \tag{8}$$

donde  $S_{\delta k}^j$  es la sensibilidad calculada en las ecuaciones (7),  $\delta_d^j$  representa la distancia entre dos puntos de precisión consecutivos sobre la trayectoria deseada,  $\delta_g^{j*}$  representa la distancia entre dos puntos de precisión sobre la trayectoria generada y el término  $\Delta z_k^j$  representa el incremento al que debe someterse la barra  $k$  para que el módulo  $\delta_g^{j*}$  adopte el valor  $\delta_d^j$ . La Ecuación (8) puede ser empleada para obtener el incremento de longitud que deben experimentar las barras del mecanismo para que entre dos puntos de precisión consecutivos la trayectoria generada alcance a la trayectoria deseada.

#### 5. Ejemplos.

En la Figura 3 se representan los resultados de dos ejemplos de aplicación del desarrollo anterior. Se muestran en dichas figuras las trayectorias generadas por un punto del

acoplador de un mecanismo cuadrilátero articulado establecido al inicio del proceso de optimización. También, y junto a la anterior trayectoria se muestra la trayectoria que se desea describa el mecanismo solución del problema. Finalmente se muestra también el mecanismo final optimizado junto con la trayectoria descrita por éste.



**Figura 3.** Resultados de los ejemplos de aplicación.

## 6. Conclusiones.

En este trabajo se ha presentado un procedimiento para la síntesis dimensional de mecanismos basado en análisis de sensibilidad. El método es de aplicación en cuando la curva generada está definida con un elevado número de puntos de precisión. Los ejemplos de aplicación establecen dos tipos diferentes de curvas demostrando una gran capacidad de convergencia así como buena precisión alcanzada en la solución final.

## 7. Referencias

1. R. Akhras, J. Angeles, *Unconstrained non-linear least-square optimisation of planar linkages for rigid-body Guidanc.*, *Mech. and Mach. Theory*, Vol.(25) (1990) 97.
2. M-Y. Lee, A.G. Erdman, S. Faik, Sensitivity distribution in the synthesis solution space of four-bar linkages. *Mech. and Mach. Theory* Vol.(34) (1999) 1127.
3. I. Ullah, S. Kota, *Optimal synthesis of mechanisms for path generation using Fourier Descriptors and Global Search Methods. J. Mech. Desig*, Vol.(119) (1997) 504.